

ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ (REASONING WITH UNCERTAINTY)

- Ακριβής και πλήρης γνώση δεν είναι πάντα δυνατή
- Οι εμπειρογνώμονες πολλές φορές παίρνουν αποφάσεις από αβέβαια, ημιτελή ή και αλληλοσυγκρουόμενα δεδομένα
- Η κλασσική λογική επιτρέπει μόνο ακριβή συλλογισμό (exact reasoning) (δηλ. κάτι είναι αληθές ή ψευδές, δεν υπάρχει ενδιάμεσο)
- Επομένως προκύπτει η ανάγκη για
 - ✓ αναπαράσταση αβέβαιης γνώσης
 - ✓ συλλογισμό από αβέβαιη γνώση

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΜΕΘΟΔΩΝ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

- Πιθανοτικές μέθοδοι (Probabilistic methods)
 - ✓ Θεωρήματα Bayes
- Σχεδόν-πιθανοτικές μέθοδοι (Quasi-probabilistic methods)
 - ✓ Υποκειμενική μέθοδος Bayes (Subjective Bayesian method)
 - ✓ Μέθοδος συντελεστών βεβαιότητας (Certainty factors)
- Επεκτεταμένες πιθανοτικές μέθοδοι
 - ✓ Θεωρία Dempster-Shafer
- Δικτυακά Μοντέλα
- Μέθοδοι ασαφούς λογικής (fuzzy models)

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Συνάρτηση πιθανότητας

$P(e)$: η πιθανότητα να παρατηρηθεί το γεγονός e

Υποθέσεις

(1) $0 \leq P(e) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$ (Ω : δειγματικός χώρος. Το μη κενό σύνολο όλων των δυνατών γεγονότων, e_i , $i=1, n$)

(3) Εάν e_i αμοιβαία αποκλειόμενα
($e_i \cap e_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j=1, n$) τότε
 $P(\cup e_i) = \sum P(e_i)$

Επίσης ισχύουν: $\sim e = \Omega \setminus e$

$$p(e) + p(\sim e) = 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ζάρι

Η πιθανότητα να έλθει '6' σ'ένα ρίξιμο (e)

$$p(e) = \frac{\text{αριθμός δυνατών επιτυχιών}}{\text{αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\text{επιτυχίες}}{\text{επιτυχίες} + \text{αποτυχίες}} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6} = 0,166$$

Ανεξαρτησία γεγονότων: κάθε αποτέλεσμα ανεξάρτητο από τα άλλα

Αμοιβαίος αποκλεισμός: κανένα αποτέλεσμα ταυτόχρονα με άλλο

Η πιθανότητα να μην έλθει '6' σ'ένα ρίξιμο ($\sim e$)

$$p(\sim e) = \frac{\text{αριθμός δυνατών αποτυχιών}}{\text{αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\text{αποτυχίες}}{\text{επιτυχίες} + \text{αποτυχίες}} = \frac{5}{1+5} = \frac{5}{6} = 0,833$$

$$p(e) + p(\sim e) = 1$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ

Πιθανότητα υπό συνθήκη ή εκ-των-υστέρων
πιθανότητα (conditional or posterior
probability)

$$p(h / e) = \frac{p(e \cap h)}{p(e)} \quad (\text{ορισμός})$$

Στον πραγματικό κόσμο, η $p(h/e)$ δεν μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία ή να εξαχθεί από στατιστικά δεδομένα.

Η πιθανότητα του να συμβεί το h δεδομένου ότι συνέβη το e .

$p(h)$, $p(e)$: εκ-των-προτέρων πιθανότητες
(prior probabilities)

$P(e \cap h)$: συνδυασμένη πιθανότητα
(conjunctive probability)

NΟΜΟΣ ΤΟΥ BAYES

$$p(h / e) = \underbrace{\frac{p(e / h) * p(h)}{p(e)}}$$

Άλλη μορφή του νόμου Bayes (θεωρώντας ότι το e εξαρτάται από τα αμοιβαία αποκλειόμενα h και $\sim h$)

$$p(h / e) = \frac{p(e / h) * p(h)}{p(e / h) * p(h) + p(e / \sim h) * p(\sim h)} \quad (2) \quad (\text{απόδειξη})$$

ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΤΑ BAYES (1)

Συνήθως αυτό που ξέρουμε είναι:

if h	—————→	π.χ. ασθένεια
then e (p)	—————→	π.χ. σύμπτωμα

Όμως συνήθως παρατηρούμε το e και
θέλουμε να επιβεβαιώσουμε το h:

if e	—————→	evidence (δεδομένο)
then h (p)	—————→	hypothesis (υπόθεση)

Π.χ. σε διαγνωστικά συστήματα:
άπαγωγική μέθοδος (abduction)

ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΤΑ BAYES (2)

Διαδικασία

1. Ο εμπειρογνώμων παρέχει τα $p(h)$,
 $p(e/h)$, $p(e/\sim h)$
2. Ο χρήστης παρέχει πληροφορίες για τα
δεδομένα/γεγονότα που παρατηρήθηκαν
3. Το έμπειρο σύστημα υπολογίζει το
 $p(h/e)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ζητούμενο: Κατά πόσο ο Γιάννης έχει
κρυολόγημα (h) δεδομένου ότι φταρνίζεται
(e) .

Δεδομένα: $p(h)=0.2$, $p(e/h)=0.7$,
 $p(e/\sim h)=0.25$

Υπολογισμός $p(h/e)$:

$$p(\sim h)=1-p(h)=1-0.2=0.8$$

$$p(h/e)=0.7*0.2/(0.7*0.2 + 0.25*0.8)=$$
$$0.14/(0.14+0.2)=0.14/0.34=0.41176$$

(Το γεγονός ότι φταρνίζεται αύξησε την
πιθανότητα να έχει κρυολόγημα από 0.2 σε 0.41)

ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΝΟΜΟΥ BAYES (1)

Ο Νόμος του Bayes αφορά ένα (1) στοιχείο (γεγονός) e και μία (1) υπόθεση h

1η Γενίκευση: ένα (1) στοιχείο (γεγονός) e και πολλές (m) υποθέσεις (h_1, h_2, \dots, h_m)

$$p(h_i / e) = \frac{p(e / h_i) * p(h_i)}{\sum_{k=1}^m p(e / h_k) * p(h_k)} \quad (3)$$

Τα h_1, h_2, \dots, h_m πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά

ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΝΟΜΟΥ BAYES (2)

2η Γενίκευση: πολλά (n) στοιχεία (γεγονότα) (e_1, e_2, \dots, e_n) και πολλές (m) υποθέσεις (h_1, h_2, \dots, h_m)

$$p(h_i / e_1 e_2 \dots e_n) = \frac{p(e_1 e_2 \dots e_n / h_i) * p(h_i)}{\sum_{k=1}^m p(e_1 e_2 \dots e_n / h_k) * p(h_k)} \quad (4)$$

Τα h_1, h_2, \dots, h_m και e_1, e_2, \dots, e_n πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά

ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΝΟΜΟΥ BAYES (3)

Ο προηγούμενος τύπος είναι ουσιαστικά μη πρακτικά εφαρμόσιμος (απαιτεί τις υπο συνθήκη πιθανότητες για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των στοιχείων για όλες τις υποθέσεις)

Επί πλέον υπόθεση: Θεωρούμε τα e_1, e_2, \dots, e_n υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένης οποιασδήποτε υπόθεσης h_i

$$p(h_i / e_1 e_2 \dots e_n) = \frac{p(e_1 / h_i) * p(e_2 / h_i) * \dots * p(e_n / h_i) * p(h_i)}{\sum_{k=1}^m p(e_1 / h_k) * p(e_2 / h_k) * \dots * p(e_n / h_k) * p(h_k)}$$

(5)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1)

Ζητούμενο: Τι είναι πιθανότερο να έχει ο Γιάννης (h_1 : κρυολόγημα, h_2 : αλλεργία, h_3 : ίωση) δεδομένου ότι φταρνίζεται (e_1), βήχει (e_2) και έχει πυρετό (e_3).

Δεδομένα:

	h_1	h_2	h_3
$p(h_i)$	0.4	0.35	0.25
$p(e_1/h_i)$	0.3	0.8	0.5
$p(e_2/h_i)$	0.9	0.0	0.7
$p(e_3/h_i)$	0.6	0.7	0.9

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (2)

Υποθέτουμε ότι κατ' αρχήν παρατηρείται το e_3 . Τότε από τον τύπο (3) έχουμε:

$$p(h_1/e_3) = \frac{0.6 * 0.4}{0.6 * 0.4 + 0.7 * 0.35 + 0.9 * 0.25} = 0.34$$

$$p(h_2/e_3) = \frac{0.7 * 0.35}{0.6 * 0.4 + 0.7 * 0.35 + 0.9 * 0.25} = 0.34$$

$$p(h_3/e_3) = \frac{0.9 * 0.25}{0.6 * 0.4 + 0.7 * 0.35 + 0.9 * 0.25} = 0.32$$

Στη συνέχεια παρατηρείται το e_1 . Τότε από τον τύπο (5) έχουμε:

$$p(h_1/e_1e_3) = \frac{0.3 * 0.6 * 0.4}{0.3 * 0.6 * 0.4 + 0.8 * 0.7 * 0.35 + 0.5 * 0.9 * 0.25} = 0.19$$

$$p(h_2/e_1e_3) = \frac{0.8 * 0.7 * 0.35}{0.3 * 0.6 * 0.4 + 0.8 * 0.7 * 0.35 + 0.5 * 0.9 * 0.25} = 0.52$$

$$p(h_3/e_1e_3) = \frac{0.5 * 0.9 * 0.25}{0.3 * 0.6 * 0.4 + 0.8 * 0.7 * 0.35 + 0.5 * 0.9 * 0.25} = 0.29$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (3)

Τέλος, παρατηρείται το e_2 . Τότε από τον τύπο (5) έχουμε:

$$p(h_1 / e_1 e_2 e_3) = \frac{0.3 * 0.9 * 0.6 * 0.4}{0.3 * 0.9 * 0.6 * 0.4 + 0.8 * 0.0 * 0.7 * 0.35 + 0.5 * 0.7 * 0.9 * 0.25} = 0.45$$

$$p(h_2 / e_1 e_2 e_3) = \frac{0.8 * 0.0 * 0.7 * 0.35}{0.3 * 0.9 * 0.6 * 0.4 + 0.8 * 0.0 * 0.7 * 0.35 + 0.5 * 0.7 * 0.9 * 0.25} = 0$$

$$p(h_3 / e_1 e_2 e_3) = \frac{0.5 * 0.7 * 0.9 * 0.25}{0.3 * 0.9 * 0.6 * 0.4 + 0.8 * 0.0 * 0.7 * 0.35 + 0.5 * 0.7 * 0.9 * 0.25} = 0.55$$

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ–ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

Πλεονεκτήματα

- Καλά θεμελιωμένη θεωρία
- Καλά ορισμένη σημασιολογία

Μειονεκτήματα

- Λειτουργούν καλά μόνο σε πολύ περιορισμένα πεδία
- Οι υποθέσεις δεν ισχύουν πάντοτε
- Απαιτείται μεγάλος αριθμός πιθανοτήτων που πρέπει να υπολογιστούν
- Δεν είναι πάντοτε δυνατόν να προσδιοριστούν όλες οι πιθανότητες